Geometria I

6 dicembre 2011

Esercizio 1. Considerati in $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare del parametro reale a, la matrice e il vettore seguenti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ a+1 & a & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{bmatrix},$$

determinare:

(a) i valori di a per i quali il sistema $Ax = b$ è compatibile e il numero di soluzioni; [Compatibile per ogni $a \in \mathbb{R}$. Soluzione unica per $a \neq -\frac{1}{2}$, ∞^1 soluzioni per $a = -\frac{1}{2}$]

(b) per ciascuno di essi, l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$; [per $a \neq -\frac{1}{2}$, $S_a = \{(0,1,1)\}$; $S_{-\frac{1}{2}} = \{(x, 1+x, 1) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \in \mathbb{R}\} = (0,1,1)+ < (1,1,0) >$]

(c) il nucleo e l'immagine dell'omomorfismo $f \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(x) = Ax$;
[Se $a \neq -1/2$, $\mathrm{Ker} f = \{(0,0,0)\}$ e $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$; se $a = -1/2$, $\mathrm{Ker} f = < (1,1,0) >$ e $\mathrm{Im} f = < (2,-2,1), (1,0,1) >$]

(d) posto $a = 0$, discutere, motivando la risposta, la diagonalizzabilità della matrice A. [La matrice ha 3 autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile]

Esercizio 2. Dati, in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ e al variare di $k \in \mathbb{R}$, gli insiemi

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \ : \ x - y = 0 = z + t \right\}, \qquad W =< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} >,$$

determinare:

(a) la dimensione di U e una sua base; [$\dim U = 2$, $\mathcal{B}_U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$]

(b) le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$ e una base per ciascuno dei due sottospazi; [Se $k \neq 1$, $\dim(U + W) = 4$ e $\dim(U \cap W) = 1$; $\mathcal{B}_{U+W}$ = base canonica; $\mathcal{B}_{U \cap W} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$. Se $k = 1$, $\dim(U + W) = 3$ e $\dim(U \cap W) = 2$; $\mathcal{B}_{U+W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\mathcal{B}_{U \cap W} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$]

(c) gli eventuali valori di k per i quali la somma $U + W$ è diretta; [Nessun valore di k]

(d) posto $k = 0$, un vettore appartenente a $W^\perp$ (considerato rispetto al prodotto scalare canonico). Stabilire se tale vettore appartiene anche a $U^\perp$. [$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in U^\perp$]

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$, dati il punto $P = (3; 2; 1)$ e le rette s e t di equazioni

$$s \ : \ \begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}, \qquad t \ : \ \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ x - 7y + z = 6 \end{cases},$$

(a) determinare la posizione reciproca delle rette s e t; [Sghembe]

(b) determinare le equazioni parametriche della retta r, sapendo che r è passante per P, perpendicolare a s e incidente t. [$r \; : \; x = 3 + 5\lambda \; \cap \; y = 2 - 3\lambda \; \cap \; z = 1 + 6\lambda$]

Esercizio 4. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, sono date le coniche $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ aventi equazioni:

$$\mathscr{C}_1 \; : \; x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 - 1x_3^2 = 0, \qquad \mathscr{C}_2 \; : \; 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2 = 0.$$

Determinare:

(a) la classificazione affine e proiettiva di $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$; [Sono coniche generali: $\mathscr{C}_1$ è un'iperbole, $\mathscr{C}_2$ un'ellisse]

(b) le equazioni degli asintoti e degli assi di $\mathscr{C}_2$; [Assi: $x = 0, y = 2$; asintoti: $y = 2 \pm i\sqrt{2}x$]

(c) un'equazione del luogo $\mathscr{L}$ dei punti P del piano tali che le polari di P rispetto a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ siano ortogonali. [$x^2 - 4y^2 + x + 4y = 0$]

Esercizio 5. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, determinare un'equazione della conica passante per il punto P di coordinate $P = (-2; 1)$, avente centro nel punto $C = (-1; -1)$, avente un asintoto parallelo alla retta $a \; : \; x - y + 4 = 0$, e tale che la direzione dell'altro asintoto sia data dal vettore $\vec{v} = (1; -1)$. [$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$]